



**Międzynarodowa Środowiskowa Szkoła Doktorska**  
przy **Centrum Studiów Polarnych**  
w Uniwersytecie Śląskim w Katowicach

ul. Będzińska 60  
41-200 Sosnowiec  
tel. +48 32 368 93 80  
polarknow@us.edu.pl  
www.mssd.us.edu.pl



**Nr projektu doktorskiego: IEDS/2023/IM/03**

**Proponowany temat rozprawy doktorskiej: *Mechaniczne układy sterowania - równoważność ze względu na sprzężenie zwrotne, niezmienniki i zastosowania w problemach optymalności***

**Jednostka prowadząca:** Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk (IM PAN), Warszawa

**Wymagania wobec kandydatów:**

1. Ukończone studia II-stopnia (magister) na kierunku matematyka lub pokrewnym (np. informatyka, fizyka). Znajomość tematyki badawczej związanej z teorią równań różniczkowych oraz podstaw geometrii różniczkowej.
2. Znajomość zagadnień: metody rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu; rozmaitość różniczkowa; formy różniczkowe na rozmaitościach i ich podstawowe własności.
3. Znajomość języka angielskiego umożliwiającą komunikację, czytanie prac naukowych oraz ich pisanie. Podstawowa umiejętność programowania.

**Opis zadań:**

1. Badanie problemu równoważności ogólnych afinicznych układów sterowania z układami mechanicznymi; charakteryzacja układów mechanicznych w klasie afinicznych układów sterowania.
2. Analiza geometrycznych struktur związanych z mechanicznymi układami sterowania.
3. Zastosowania uzyskanych wyników w problemach stabilności i optymalności rozwiązań konkretnych układów sterowania.
4. Pozyskiwanie, przetwarzanie oraz analiza dostępnej literatury i najnowszych dostępnych publikacji w tematyce projektu.
5. Przygotowanie artykułów naukowych oraz prezentacji konferencyjnych.
6. Regularne sprawozdania postępów pracy.

**Streszczenie:**

Układ sterowania można zdefiniować jako układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$x' = F(t, x, u)$$

zależny od parametrów  $u = u(t) \in U$  nazywanych sterowaniami. Zbiór sterowań  $U$  to na ogół podzbiór przestrzeni Euklidesowej: podprzestrzeń, podzbiór ograniczony albo zbiór dyskretny. Dla dowolnego sterowania  $u(t)$  otrzymujemy stowarzyszone rozwiązanie  $x(t)$  nazywane trajekcją



układu. Klasyczne problemy rozważane w kontekście układów sterowania dotyczą sterowalności (czy dwa stany  $x$  i  $y$  można połączyć trajekcją), optymalności (czy dane rozwiązanie jest optymalne ze względu na działanie zadanego funkcjonau), stabilności rozwiązań (jak zachowują się trajektorie pod wpływem perturbacji). Układy sterowania w naturalny sposób opisują systemy pojawiające się w zastosowaniach (w tym np. rzeczywiste modele sterowania pojazdami, układy sterowania w robotyce, modele ekonomiczne lub biologiczne, i inne).

W ostatnim czasie duże zainteresowanie przykuwa teoria mechanicznych układów sterowania. Dziedzina łączy z jednej strony klasyczne metody mechaniki (podejście lagranżowskie, hamiltonowskie, metody grup Liego, e.t.c.), a z drugiej współczesne metody nieliniowych układów sterowania. Przestrzeń stanów w układzie mechanicznym ma wymiar  $2n$  (współrzędne to położenia  $x$  i prędkości  $y$ ), a ogólny układ mechaniczny można zapisać, po wyeliminowaniu  $y = x'$ , w postaci równania drugiego rzędu jako

$$x_i'' = \sum_{jk} A_{ijk}(x)x_j'x_k' + \sum_j B_{ij}(x)x_j' + C_i(x) + \sum_j u_j G_j(x)$$

Główny problem rozważany w projekcie to problem charakteryzacji mechanicznych układów sterowania w szerszej klasie afinicznych układów sterowania, dla których funkcja  $F$  przyjmuje postać

$$F(t, x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x).$$

dla pewnych pól wektorowych  $f$  (zwanego dryfem) oraz  $g_i$  (zwanymi polami sterującymi). Pytamy czy ogólny afiniczny układ sterowania można sprowadzić do układu mechanicznego przy pomocy transformacji sprzężenia zwrotnego

$$x := X(x) \quad u := U(x, u)$$

(czyli transformacja sterowania zależy od stanu układu). Jest to nierozwiązany trudny problem.

W projekcie proponujemy podejście związane z geometrycznymi niezmiennikami układów sterowania wzorowanymi na klasycznym pojęciu krzywizny. W zależności od otrzymanych wyników i zainteresowań studenta projekt może rozwinąć się w:

1. uszczegółowienie wyjściowego problemu do analogicznego problemu dla liniowych układów mechanicznych;
2. zaawansowane badanie strony geometrycznej układów - m.in. związki ze strukturami rzutowymi i konforemnymi;
3. zastosowania otrzymanych wyników w problemach optymalności i stabilizacji układów (albo ogólnych klas układów, albo konkretnych modeli), w tym nierówności na punkty sprzężone.

#### Literatura wstępna:



**Międzynarodowa Środowiskowa Szkoła Doktorska**  
przy **Centrum Studiów Polarnych**  
w Uniwersytecie Śląskim w Katowicach

ul. Bedzińska 60  
41-200 Sosnowiec  
tel. +48 32 368 93 80  
polarknow@us.edu.pl  
www.mssd.us.edu.pl



1. A. M. Bloch, "Nonholonomic Mechanics and Control," Springer-Verlag, New York, 2003.
2. F. Bullo, A. D. Lewis, "Geometric Control of Mechanical Systems," Springer Verlag, New York, 2004.
3. W. Respondek, S. Ricardo, "When is a control system mechanical?," Journal of Geometric Mechanics, Volume 2, Issue 3: 265-302 (2010).

**Inne informacje:**

Praca będzie realizowana pod opieką merytoryczną: dr. hab. Wojciecha Kryńskiego, e-mail: [krynski@impan.pl](mailto:krynski@impan.pl), Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk.

Sekretarz Komisji Rekrutacyjnej MŚSD: +48 32 3689 380, e-mail: [polarknow@us.edu.pl](mailto:polarknow@us.edu.pl)

Informacje dotyczące rekrutacji do MŚSD: <https://www.mssd.us.edu.pl/rekrutacja-2023-2024-reg/>